§ 3. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

1. Тройной интеграл в прямоугольных координатах. Пусть функция $f(M) = f(x, y, z)$ задана в некоторой ограниченной замкнутой пространственной области V. Разобьем эту область на пространственные ячейки $V_1, V_2, \ldots, V_n$. В каждой ячейке V_i $(i=1, 2, 3, \ldots, n)$ выберем произвольно точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ и умножим значение функции f в этой точке на объем Δv_i ячейки V_i. Сумма таких произведений по всем ячейкам

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta v_i$$

называется *интегральной суммой*. Обозначим через $d(V_i)$ диаметр ячейки V_i, т. е. расстояние между наиболее удаленными точками этой ячейки, и $\max d(V_i)$ — наибольший из диаметров всех ячеек данного разбиения. *Тройным интегралом* $\iiint\limits_V f(M)\,dv$ *от функции* $f(M)$ *по области* V *называется предел интегральных сумм при условии* $\max d(V_i) \to 0$, т. е. при неограниченном увеличении числа ячеек, когда все ячейки стягиваются в точку:

$$\iiint\limits_V f(M)\,dv = \lim_{\max d(V_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta v_i.$$

Если такой предел существует, то функция $f(M)$ называется *интегрируемой* в области V; *всякая непрерывная в ограниченной замкнутой области V функция $f(M)$ интегрируема в ней.* В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только непрерывных функций.

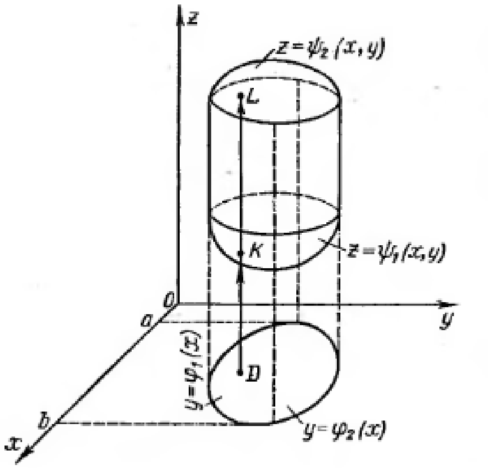

Рис. 198

Тройной интеграл обладает свойствами, аналогичными свойствам двойного интеграла.

В декартовых координатах элемент объема обычно записывают в виде $dv = dx\,dy\,dz$, а тройной интеграл обозначают

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

Пусть V проектируется в область D на плоскости xOy так, что всякая прямая, параллельная оси Oz и проходящая внутри области D, пересекает границу области V ровно в двух точках. В общем случае такая область ограничена сверху поверхностью $z=\psi_2(x, y)$, снизу — поверхностью $z=\psi_1(x, y)$ и с боков — цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz (рис. 198). В частных случаях боковая поверхность цилиндра может превратиться в линию (рис. 199). Функции $\psi_1(x, y)$ и $\psi_2(x, y)$ мы будем считать непрерывными. Тройной интеграл по такой области вычисляется по формуле

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_D dx\,dy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz. \qquad (1)$$

Здесь внутренний интеграл $\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz$ берется по z при фиксированных, но произвольных в D значениях x и y от нижней границы области V до ее верхней границы (т. е. по отрезку KL, см. рис. 198). В результате получается некоторая функция от x и y, которая интегрируется затем по области D.

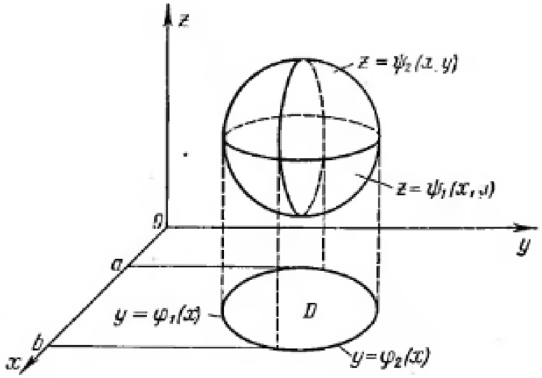

Рис. 199

Наиболее простой вид формула (1) принимает в случае, когда V есть прямоугольный параллелепипед, ограниченный плоскостями $x=a$, $x=b$, $y=c$, $y=d$, $z=e$, $z=g$:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_e^g f(x, y, z)\,dz. \qquad (2)$$

Если область V имеет более сложную форму, то ее разбивают на конечное число областей $V_1, V_2, \ldots, V_n$, каждая из которых удовлетворяет условиям, изложенным выше.

Замечание. Аналогичные определения и формулы могут быть получены и тогда, когда область V проектируется в область D, лежащую или в плоскости xOz, или в плоскости yOz.

1704. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$ по области V, ограниченной плоскостями $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$ и $z=1$.

Решение. Вычисляем данный интеграл по формуле (2):

$$\iiint\limits_V (x+y+z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 (x+y+z)\,dz.$$

Внутренний интеграл вычисляем, считая x и y постоянными:

$$\int\limits_0^1 (x+y+z)\,dz = \frac{(x+y+z)^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{(x+y+1)^2}{2} - \frac{(x+y)^2}{2} = \frac{1}{2}\left[(x+1+y)^2-(x+y)^2\right].$$

Полученную функцию от x и y интегрируем по y, считая x постоянным:

$$\int_0^1 \frac{1}{2}[(x+1+y)^2-(x+y)^2]\,dy=\frac{1}{2}\int_0^1 [(x+1+y)^2-(x+y)^2]\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{(x+1+y)^3}{3}-\frac{(x+y)^3}{3}\right]\Bigg|_0^1=\frac{1}{6}[(x+2)^3-(x+1)^3-(x+1)^3+x^3]=$$

$$=\frac{1}{6}[(x+2)^3-2(x+1)^3+x^3].$$

Полученную функцию от x интегрируем по x:

$$\int_0^1 \frac{1}{6}[(x+2)^3-2(x+1)^3+x^3]\,dx=\frac{1}{6}\int_0^1 [(x+2)^3-2(x+1)^3+x^3]\,dx=$$

$$=\frac{1}{6}\left[\frac{(x+2)^4}{4}-\frac{(x+1)^4}{2}+\frac{x^4}{4}\right]\Bigg|_0^1=\frac{1}{6}\left(\frac{81}{4}-8+\frac{1}{4}-4+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}.$$

Обычно для сокращения записи все вычисления записывают в одну строку следующим образом:

$$\iiint_V (x+y+z)\,dx\,dy\,dz=\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 (x+y+z)\,dz=\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{(x+y+z)^2}{2}\Bigg|_0^1 dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^1 [(x+y+1)^2-(x+y)^2]\,dy=\frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{(x+1+y)^3}{3}-\frac{(x+y)^3}{3}\right]\Bigg|_0^1 dx=$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^1 [(x+2)^3-(x+1)^3-(x+1)^3+x^3]\,dx=\frac{1}{6}\int_0^1 [(x+2)^3-2(x+1)^3+x^3]\,dx=$$

$$=\frac{1}{6}\left[\frac{(x+2)^4}{4}-\frac{(x+1)^4}{2}+\frac{x^4}{4}\right]\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{81}{4}-8+\frac{1}{4}-4+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}.$$

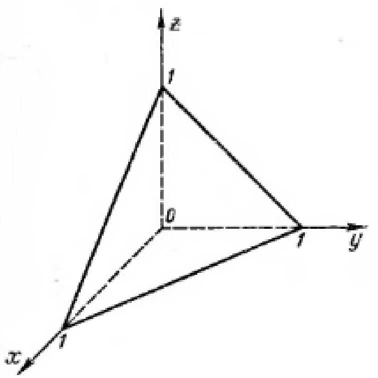

Рис. 200

1705. Вычислить тройной интеграл $\iiint_V (1-y)xz\,dx\,dy\,dz$, если область V ограничена плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$ и $z=1-x-y$.

Решение. В этой задаче область V можно спроектировать, например, на плоскость yOz. Тогда область V (рис. 200) имеет нижнюю границу $x=0$ и верхнюю границу $x=1-y-z$. Область D проектируется в отрезок [0, 1] оси Oy и имеет границы $z=0$ и $z=1-y$. Переходя к повторному интегрированию, получим

$$\iiint_V (1-y)xz\,dx\,dy\,dz=\int_0^1 (1-y)\,dy\int_0^{1-y} z\,dz\int_0^{1-y-z} x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 (1-y)\,dy\int_0^{1-y} zx^2\Big|_0^{1-y-z} dz=\frac{1}{2}\int_0^1 (1-y)\,dy\int_0^{1-y} z(1-y-z)^2\,dz=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 (1-y)\,dy\int_0^{1-y} [(1-y)^2z-2(1-y)z^2+z^3]\,dz=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 (1-y)\left[(1-y)^2\cdot\frac{z^2}{2}-2(1-y)\cdot\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}\right]\Bigg|_0^{1-y}\cdot dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 (1-y)\left[\frac{(1-y)^4}{2}-\frac{2(1-y)^4}{3}+\frac{(1-y)^4}{4}\right]dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{12}(1-y)^5\,dy=-\frac{1}{24}\cdot\frac{(1-y)^6}{6}\Bigg|_0^1=\frac{1}{144}.$$

Вычислить следующие тройные интегралы:

1706. $\iiint_V x^2y^2z\,dx\,dy\,dz$, если область V ограничена плоскостями $x=1$, $x=3$, $y=0$, $y=2$, $z=2$, $z=5$.

1707. $\iiint_V \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^3}$, если область V ограничена плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

1708. $\iiint_V xyz\,dy\,dz\,dx$, если область V ограничена плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$ и сферой $x^2+y^2+z^2=1$.

1709. $\iiint_V x\,dx\,dy\,dz$, если область V ограничена цилиндром $x^2+y^2=1$ и плоскостями $z=0$ и $z=3$.

2. Переход к цилиндрическим и сферическим координатам. При вычислении тройных интегралов иногда бывает полезно сделать замену переменных. Пусть

$$u=u(x,\ y,\ z),\quad v=v(x,\ y,\ z),\quad w=w(x,\ y,\ z) \qquad (3)$$

— функции, определенные во всем пространстве xyz или в некоторой его области V и имеющие непрерывные частные производные в области V. Допустим также, что систему уравнений (3) можно однозначно разрешить относительно x, y и z:

$$x=x(u,\ v,\ w),\quad y=y(u,\ v,\ w),\quad z=z(u,\ v,\ w), \qquad (4)$$

тогда каждой точке $M(x,\ y,\ z)$ из области V будет взаимно однозначно соответствовать тройка чисел $(u,\ v,\ w)$, называемых *криволинейными координатами* этой точки. Если область V расположена в той части пространства xyz, в которой введены криволинейные координаты u, v, w, то справедлива следующая формула:

$$\iiint_V f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_{V'} f[x(u,\ v,\ w),\ y(u,\ v,\ w),\ z(u,\ v,\ w)]\,|J|\,du\,dv\,dw,$$

где V' — область изменения криволинейных координат u, v, w, отвечающая области V, а J — якобиан преобразования (4):

$$J(u,\ v,\ w)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}.$$

В частности, в цилиндрических координатах формулы (4) имеют вид (рис. 201)

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,\quad z=z,$$

где $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $0\leqslant\rho<+\infty$, $-\infty<z<+\infty$. В этом случае $|J|=\rho$ и переход от прямоугольных координат x, y, z к цилиндрическим координатам φ, ρ, z осуществляется по формуле

$$\iiint\limits_V f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\iiint\limits_{V'} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z)\,\rho\,d\varphi\,d\rho\,dz. \qquad (5)$$

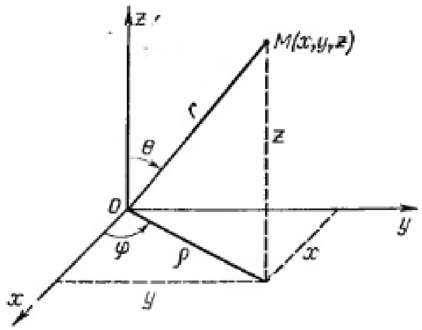

Рис. 201

Другим важным частным случаем криволинейных координат являются сферические координаты. В сферических координатах формулы (4) имеют вид (см. рис. 201)

$$x=r\cos\varphi\sin\theta,\quad y=r\sin\varphi\sin\theta,$$
$$z=r\cos\theta, \qquad (6)$$

где $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $0\leqslant r<+\infty$. В этом случае $|J|=r^2\sin\theta$ и переход от прямоугольных координат x, y, z к сферическим координатам φ, θ, r осуществляется по формуле

$$\iiint\limits_V f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{V'} f(r\cos\varphi\sin\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\theta)\cdot r^2\sin\theta\,d\varphi\,d\theta\,dr. \qquad (7)$$

1710. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V (x^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$, если область V ограничена плоскостью $y=2$ и параболоидом $x^2+z^2=2y$.

Решение. Область V (рис. 202) ограничена «снизу» параболоидом $2y=x^2+z^2$, а «сверху» — плоскостью $y=2$. Эта область проектируется в область D плоскости xOz, ограниченную окружностью $x^2+z^2=4$. Последнее уравнение получено в результате исключения y из уравнений плоскости $y=2$ и параболоида $2y=x^2+z^2$.

Введем цилиндрические координаты:

$$x=\rho\cos\varphi,\quad z=\rho\sin\varphi,\quad y=y.$$

Так как $x^2+z^2=\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=\rho^2$, то

$$\iiint\limits_V (x^2+z^2)\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{V'}\rho^2\rho\,d\varphi\,d\rho\,dy.$$

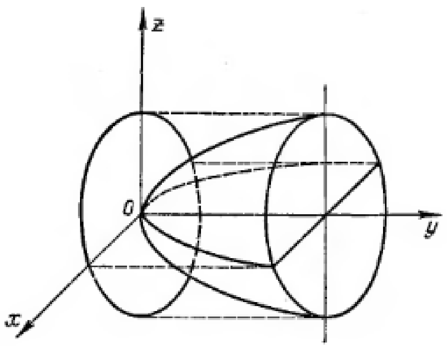

Рис. 202

В области V координата φ меняется от 0 до 2π, ρ — от 0 до 2, y — от параболоида $\frac{\rho^2}{2}$ до плоскости $y=2$.

Итак,

$$\iiint\limits_V (x^2+z^2)\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{V'}\rho^2\rho\,d\varphi\,d\rho\,dy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho^3\,d\rho\int\limits_{\frac{\rho^2}{2}}^2 dy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho^3 y\Big|_{\frac{\rho^2}{2}}^2\,d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho^3\left(2-\frac{\rho^2}{2}\right)d\rho=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\left(2\rho^3-\frac{1}{2}\rho^5\right)d\rho=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\rho^4-\frac{1}{12}\rho^6\right)\Big|_0^2\,d\varphi=$$

$$=\frac{8}{3}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{8}{3}\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{16\pi}{3}.$$

1711. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, если область V ограничена сферой $x^2+y^2+z^2=z$.

Решение. Область V (рис. 203) ограничена снизу и сверху сферой $x^2+y^2+z^2=z$. В сферических координатах $x^2+y^2+z^2=r^2$, поэтому по формуле (7)

$$\iiint\limits_V\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{V'} rr^2\sin\theta\,d\varphi\,d\theta\,dr.$$

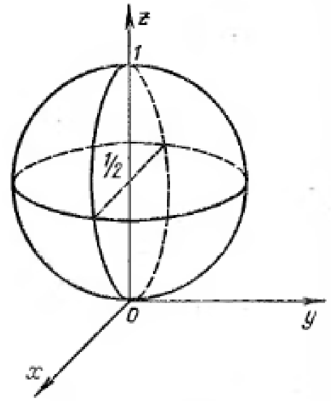

Рис. 203

Очевидно, что в области V φ меняется от 0 до 2π, θ — от 0 до $\frac{\pi}{2}$, r — от 0 до $\cos\theta$, так как уравнение данной сферы принимает вид $r^2=r\cos\theta$, или $r=\cos\theta$. Тогда имеем

$$\iiint\limits_V\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{V'} r^3\sin\theta\,d\varphi\,d\theta\,dr=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta\int\limits_0^{\cos\theta}r^3\,dr=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,\frac{r^4}{4}\Big|_0^{\cos\theta}d\theta=\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^4\theta\,d\theta=-\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d(\cos\theta)=$$

$$=-\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos^5\theta}{5}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{1}{20}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=$$

$$=\frac{1}{20}\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{\pi}{10}.$$

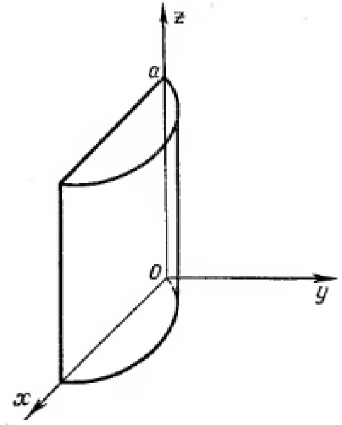

Рис. 204

Вычислить следующие тройные интегралы:

1712. $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, если область V ограничена плоскостями $y=0$, $z=0$, $z=a$ и цилиндром $x^2+y^2=2x$ (рис. 204).

1713. $\iiint\limits_V x\,dx\,dy\,dz$, если область V ограничена конусом $x^2=\frac{h^2}{R^2}(z^2+y^2)$ и плоскостью $x=h$.

1714. $\iiint\limits_V dx\,dy\,dz$, если область V ограничена плоскостью $y=0$, цилиндром $x^2+z^2=2Rx$ и сферой $x^2+y^2+z^2=4R^2$.

1715. $\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}}$, если область V ограничена плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$ и сферой $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Указание. Для взятия интеграла воспользоваться подстановкой $r=a\sin t$.

1716. $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, если область V ограничена сферами $x^2+y^2+z^2=R_1^2$ и $x^2+y^2+z^2=R_2^2$ $(R_1<R_2)$.

§ 4. ПРИЛОЖЕНИЯ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

1. Вычисление объемов. Объем пространственного тела V находится по формуле

$$V=\iiint\limits_V dx\,dy\,dz.$$

В цилиндрических и сферических координатах имеем

$$V=\iiint\limits_{V'} \rho\,d\varphi\,d\rho\,dz$$

и $$V=\iiint\limits_{V'} r^2\sin\theta\,d\varphi\,d\theta\,dr.$$

1717. Вычислить объем тела, ограниченного цилиндрами $z=4-y^2$ и $z=y^2+2$ и плоскостями $x=-1$, $x=2$.

Решение. Тело, объем которого находим (рис. 205), ограничено снизу цилиндром $z=y^2+2$, а сверху — цилиндром $z=4-y^2$; оно проектируется в область D плоскости xOy, ограниченную прямыми $x=-1$, $x=2$, $y=1$ и $y=-1$. Два последних уравнения получены в результате исключения z из уравнений цилиндров. С учетом симметрии области V относительно плоскости xOz, имеем

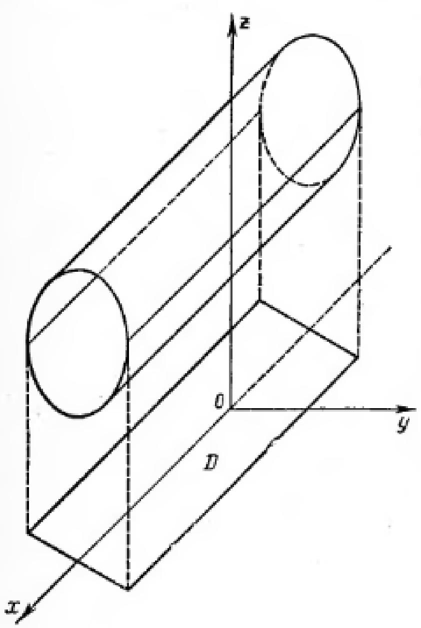

Рис. 205

$$V=2\int_{-1}^{2}dx\int_0^1 dy\int_{y^2+2}^{4-y^2}dz=$$

$$=2\int_{-1}^{2}dx\int_0^1 z\Big|_{y^2+2}^{4-y^2}dy=$$

$$=2\int_{-1}^{2}dx\int_0^1(4-y^2-y^2-2)\,dy=4\int_{-1}^{2}\left(y-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1dx=4\int_{-1}^{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)dx=\frac{8}{3}\int_{-1}^{2}dx=$$

$$=\frac{8}{3}\,x\Big|_{-1}^{2}=\frac{16}{3}+\frac{8}{3}=8.$$

1718. Вычислить объем тела, ограниченного параболоидом $x=6-z^2-y^2$ и конусом $x^2=y^2+z^2$ $(x\geqslant 0)$.

Решение. Объем искомого тела (рис. 206) ограничен «снизу» конусом $x^2=y^2+z^2$, а «сверху» — параболоидом $x=6-y^2-z^2$ и проектируется в область D плоскости yOz, ограниченную окружностью $y^2+z^2=4$. Последнее уравнение получено в результате исключения x из уравнений конуса и параболоида. Введем цилиндрические координаты:

$$y=\rho\cos\varphi,\quad z=\rho\sin\varphi,\quad x=x.$$

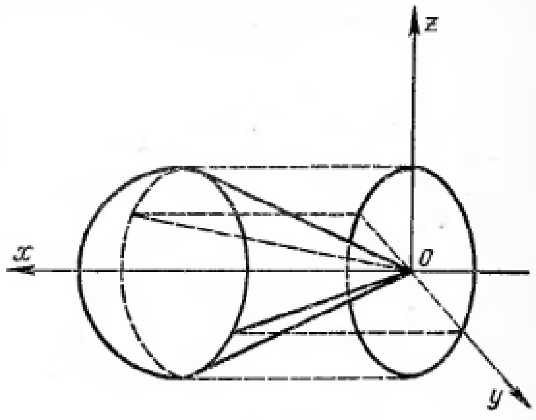

Рис. 206

С учетом того, что данное тело симметрично относительно плоскостей xOz и xOy и что уравнения окружности, ограничивающей область D, конуса и параболоида, соответственно принимают вид $\rho=2$, $x=\rho$ и $x=6-\rho^2$, имеем

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^2\rho\,d\rho\int_\rho^{6-\rho^2}dx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^2\rho x\Big|_\rho^{6-\rho^2}d\rho=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^2(6\rho-\rho^3-\rho^2)\,d\rho=$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(3\rho^2-\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^3}{3}\right)\Big|_0^2d\varphi=\frac{64}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{64}{3}\,\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{32\pi}{3}.$$

1719. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью $(x^2+y^2+z^2)^3=3xyz$.